Η Απόδειξη στα Μαθηματικά

Η μέθοδος της αποδείξεως σύμφωνα με την οποία τα συμπεράσματα (νέες γνώσεις) προκύπτουν από τις προϋπάρχουσες μέσω επιχειρημάτων (συλλογισμούς, κανόνες συνεπαγωγής), αναπτύχθηκε από τους αρχαίους Έλληνες, και έχει γίνει η βασική αρχή των σύγχρονων μαθηματικών. Παράδειγμα τέτοιων μεθόδων είναι η Ευκλείδεια γεωμετρία.

Στα μαθηματικά ***αξίωμα*** είναι μια πρόταση η οποία δεν αποδεικνύεται, αλλά θεωρείται είτε προφανής, ή αποτέλεσμα κάποιας απόφασης. Έτσι, αξίωμα είναι μια λογική πρόταση, της οποίας η αλήθεια θεωρείται δεδομένη και χρησιμεύει ως αρχικό σημείο για την αναγωγή και το συμπέρασμα άλλων αληθών προτάσεων, ανάλογα με τη θεωρία που εφαρμόζεται. Τίποτα δεν μπορεί να παραχθεί χωρίς κάποια υπόθεση. Τα ***αξιώματα*** και τα ***αιτήματα*** βρίσκονται στην βάση της αποδεικτικής διαδικασίας. Γίνονται δεκτά χωρίς απόδειξη. Όλοι οι υπόλοιποι ισχυρισμοί πρέπει να αποδειχθούν. Π.χ. η πρόταση «από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία » αποτελεί αξίωμα της Γεωμετρίας.

Στα μαθηματικά, ο όρος *αξίωμα* χρησιμοποιείται με δυο σχετικές αλλά διαφορετικές έννοιες: τα «λογικά» και «μη λογικά» αξιώματα. Τα λογικά αξιώματα είναι συνήθως προτάσεις που γίνονται αποδεκτές ως καθολικά αληθείς (π.χ. το A και B συνεπάγεται το A). Τα μη-λογικά αξιώματα (π.χ. $a+b = b+a$) ορίζουν ιδιότητες για την περιοχή κάποιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας (όπως η Αριθμητική. Αντίθετα με τα θεωρήματα, τα αξιώματα δεν μπορούν γενικά να παραχθούν με αρχές επαγωγής (εκτός αν πλεονάζουν), ούτε γίνεται να αποδειχθούν, αφού αποτελούν αρχικά σημεία: δεν υπάρχει κάτι από το οποίο να απορρέουν (τότε θα ήταν θεωρήματα).

Η διαδικασία του να δειχθεί ότι όλες οι προτάσεις μιας θεωρίας ή ενός συστήματος μπορούν να παραχθούν από ένα μικρό αριθμό από προτάσεις (τα αξιώματα) λέγεται ***αξιωματικοποίηση*** της θεωρίας. Συνήθως υπάρχουν πολλοί τρόποι να αξιωματικοποιηθεί μια μαθηματική περιοχή. Το σύνολο αυτό υπόκειται σε δύο περιορισμούς: α) τα αξιώματα να είναι συμβιβαστά, και β) ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ακόμη θα πρέπει το πλήθος των αξιωμάτων να είναι όσο το δυνατό λιγότερο.

Στα μαθηματικά, ένα ***θεώρημα*** είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται με βάση προηγουμένως αποδεδειγμένες προτάσεις ή αποδεκτές όπως τα αξιώματα. Παράγονται χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο σύνολο από συμπερασματικούς κανόνες και αξιώματα χωρίς επιπλέον υποθέσεις.

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων έχουν δυο μέρη, που λέγονται ***υποθέσεις*** και ***συμπεράσματα***. Η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος είναι ένα λογικό επιχείρημα που αποδεικνύει ότι τα συμπεράσματα είναι αναγκαία συνέπεια των υποθέσεων, με την έννοια ότι αν οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε και τα συμπεράσματα πρέπει επίσης να είναι αληθή, χωρίς περαιτέρω υποθέσεις.

Ορισμένα θεωρήματα είναι προφανή, με την έννοια ότι έπονται από ορισμούς, αξιώματα, και άλλα θεωρήματα με προφανή τρόπο, και οι αποδείξεις τους δεν περιέχουν ιδιαίτερα εκπληκτικούς και ενδιαφέροντες συλλογισμούς. Κάποια άλλα λέγονται βαθειά: οι αποδείξεις τους μπορεί να είναι εκτεταμένες και δύσκολες, να χρησιμοποιούν περιοχές των μαθηματικών που θεωρούνται μακρινές από τη διατύπωση του θεωρήματος, ή να καταδεικνύουν εκπληκτικές διασυνδέσεις μεταξύ απομακρυσμένων κλάδων των μαθηματικών. Ένα θεώρημα μπορεί να είναι απλό στη διατύπωσή του, αλλά να έχει βαθιά απόδειξη. Κλασσικό παράδειγμα είναι το τελευταίο θεώρημα του Φερμά[1].

Τα θεωρήματα στα μαθηματικά και οι ***θεωρίες*** στην επιστήμη έχουν βασικές διαφορές. Οι επιστημονικές θεωρίες δεν αποδεικνύονται, κάνουν προβλέψεις για τα φυσικά φαινόμενα και δοκιμάζονται με τα πειράματα. Κάθε διαφορά θεωρίας και πειράματος καταδεικνύει την μη ορθότητα της επιστημονικής θεωρίας, ή τουλάχιστον τα όρια της ισχύος της. Στην απόδειξη των θεωρημάτων δεν υπάρχει χώρος για πειράματα ή εμπειρικές ενδείξεις.

---

[1] Στη θεωρία αριθμών, το τελευταίο θεώρημα του Φερμά λέει ότι: Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι μη μηδενικοί x,y,z τέτοιοι ώστε να ισχύει: $x^n + y^n = z^n$, για n φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 2. Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε πρώτη φορά το 1637 από τον Φερμά, ως σημείωση στο βιβλίο Αριθμητικά του Διόφαντου, όπου ο ίδιος ισχυρίστηκε ότι έχει την απόδειξη του θεωρήματος αλλά είναι τόσο μεγάλη που δεν χωρούσε στη σημείωση. Καμία επιτυχής απόδειξη δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1995, παρά τις προσπάθειες των αμέτρητων μαθηματικών κατά τα 358 χρόνια που μεσολάβησαν. Αποδείχθηκε από τον άγγλο μαθηματικό Άντριου Γουάιλς το 1995 με την βοήθεια του πρώην μαθητή του Richard Taylor.

Η ορολογία ***Θεώρημα*** φυλάσσεται για τα σημαντικότερα αποτελέσματα, ενώ τα αποτελέσματα που είναι λιγότερο σημαντικά ή διακρίνονται με άλλους τρόπους ονομάζονται από την ακόλουθη ορολογία:

- Η ***πρόταση*** είναι μία δήλωση που έχει απλή απόδειξη ή ότι είναι βασική συνέπεια ενός ορισμού.
- Το ***λήμμα*** είναι ένα "προθεώρημα", μία δήλωση που σχηματίζει μέρος της απόδειξης ενός μεγαλύτερου θεωρήματος. Η διάκριση μεταξύ των θεωρημάτων και των λημμάτων είναι μάλλον αυθαίρετη, μιας και το μείζον αποτέλεσμα του ενός μαθηματικού είναι η ελάσσων αξίωση ενός άλλου.
- Το ***πόρισμα*** είναι μια πρόταση που συνεπάγεται με μικρή ή και καθόλου απόδειξη από ένα άλλο θεώρημα ή ορισμό. Αυτό σημαίνει ότι η πρόταση Β είναι πόρισμα της πρότασης Α αν η Β μπορεί γρήγορα να συναχθεί από την Α.

Υπάρχουν και άλλοι όροι, που χρησιμοποιούνται λιγότερο συχνά, οι οποίοι προσδίδονται συμβατικά σε αποδεδειγμένες δηλώσεις, έτσι ώστε ορισμένα θεωρήματα να αναφέρονται με ιστορικά ή συνηθισμένα ονόματα. Για παράδειγμα:

- ***Ταυτότητα***, που χρησιμοποιείται για θεωρήματα τα οποία δηλώνουν μια ισότητα μεταξύ δύο μαθηματικών εκφράσεων. Παραδείγματα αποτελούν η Ταυτότητα του Όιλερ ($e^{i\pi}+1=0$).
- ***Κανόνας***, που χρησιμοποιείται για ορισμένα θεωρήματα, όπως ο Κανόνας του Κράμερ.
- ***Νόμος***. Παράδειγμα ο Νόμος των ημιτόνων.
- ***Αρχή.*** Παραδείγματα η πολλαπλασιαστική αρχή.
- Το ***Αντίστροφο*** ενός άλλου θεωρήματος. Το αντίστροφο ενός θεωρήματος δεν είναι απαραιτήτως πάντα αληθές.

Λίγα πασίγνωστα θεωρήματα έχουν ακόμα πιο ιδιαίτερα ονόματα, π.χ. ο **Αλγόριθμος διαίρεσης** είναι ένα θεώρημα που εκφράζει το αποτέλεσμα της διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς.

Μία μη-αποδεδειγμένη δήλωση που πιστεύεται πως είναι αληθής καλείται ***εικασία*** (ή ενίοτε ***υπόθεση***, αλλά με διαφορετικό νόημα από το παραπάνω). Για να θεωρηθεί εικασία, μια δήλωση πρέπει συνήθως να προταθεί δημόσια, οπότε το όνομα του ατόμου που έκανε την πρόταση μπορεί να προσκολληθεί στην εικασία, όπως για παράδειγμα με την Εικασία του Γκόλντμπαχ[2].

Βασικές μέθοδοι για την απόδειξη προτάσεων.

Α) Η ευθεία απόδειξη: Ξεκινάμε από τα δεδομένα και με μια σειρά λογικών βημάτων φτάνουμε στο συμπέρασμα, λαμβάνοντας υπόψη γνωστά θεωρήματα ορισμούς και αξιώματα.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση w. Για την απόδειξη της πρότασης w, αρκεί να κατασκευάσουμε μια πεπερασμένη διαδοχή αληθών προτάσεων της μορφής:

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r, \ldots, t \Rightarrow u,\ u \Rightarrow w$$

όπου p είναι μια αληθής πρόταση.

Παράδειγμα: Αν α<β να δείξετε ότι: $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

Απόδειξη:

Ισχύει: $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\alpha<\alpha+\beta \Rightarrow 2\alpha<\alpha+\beta \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Ακόμη: $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha+\beta<\beta+\beta \Rightarrow \alpha+\beta<2\beta \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

Β) Η εις άτοπον απαγωγή: Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις, φθάνουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση ή στις υποθέσεις μας ή σε κάτι που ισχύει.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η εξίσωση $ημ^2x+\frac{1}{συνx}=2$ (1) δεν έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{3}$.

---

[2] Η **εικασία του Γκόλντμπαχ** είναι ένα από τα παλιότερα άλυτα προβλήματα της θεωρίας αριθμών και γενικότερα των μαθηματικών. Εκφράζεται ως εξής: Κάθε άρτιος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών, έτσι ώστε για κάθε $n \geqq 2$, $2n=p+q$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Για παράδειγμα, 4=2+2, 14=3+11=7+7.

Απόδειξη:

Έστω ότι ο $\frac{\pi}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Τότε θα ισχύει ημ$^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{συν\left(\frac{\pi}{2}\right)}=2 \Rightarrow \frac{3}{4}+2$

$= 2 \Rightarrow \frac{11}{4} = 2 \Rightarrow 11=4$, άτοπο. Άρα ο $\frac{\pi}{2}$ δεν είναι ρίζα της (1).

Γ) Με ισοδυναμίες: Μετασχηματίζουμε τον ισχυρισμό που θέλουμε να αποδείξουμε σε ένα ισοδύναμο του, ο οποίος αληθεύει.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν x,y είναι θετικοί αριθμοί να δειχθεί ότι $\frac{x}{x+1} < \frac{x+y+3}{x+y+2}$.

Απόδειξη:

Ισχύει: $\frac{x}{x+1} < \frac{x+y+3}{x+y+2} \Leftrightarrow$

$(x+1)(x+y+2)\cdot\frac{x}{x+1} < (x+1)(x+y+2)\cdot\frac{x+y+3}{x+y+2} \Leftrightarrow$

$(x+y+2)\cdot x < (x+1)\cdot(x+y+3) \Leftrightarrow$

$x^2+yx+2x<x^2+xy+3x+x+y+3 \Leftrightarrow$

$0 < 2x+y+3$ το οποίο είναι αληθές γιατί $x>0$ και $y>0$.

Δ) Μέθοδος με αντιπαράδειγμα: Για να δείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν αληθεύει πάντα, αρκεί να δείξουμε ότι δεν αληθεύει σε μια ειδική περίπτωση (αντιπαράδειγμα).

<u>Παράδειγμα:</u> Να αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός $\frac{2\nu+1}{7}\in N$ δεν είναι δυνατόν να ισχύει για κάθε $\nu\in N$.

Απόδειξη:

Πράγματι για $\nu=2$, $\frac{2\nu+1}{7}=\frac{5}{7}\notin N$.

Ε) Μέθοδος της τέλειας επαγωγής:

Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: Έστω p(ν) ένας προτασιακός τύπος ορισμένος στο σύνολο Ν. Αν:

p(0) είναι αληθής πρόταση και

$\forall k \in N$, $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ αληθής

τότε ο προτασιακός τύπος p(ν) ισχύει για κάθε $\nu \in N$.

<u>*Παράδειγμα:*</u> Αν η α_ν, ν=1,2,3,... είναι αριθμητική πρόοδος, να δειχθεί ότι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, ν=1,2,3,...

Απόδειξη:

Η πρόταση για ν=1 ισχύει, πράγματι $\alpha_1=\alpha_1+(1-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_1$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ν=k, δηλαδή ισχύει $\alpha_k=\alpha_1+(\kappa-1)\omega$ (1).

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για ν=k+1, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\alpha_{k+1}=\alpha_1+k\omega$.

Πράγματι προσθέτοντας και στα δύο μέλη της (1) το ω έχουμε την σχέση: $\alpha_k+\omega=\alpha_1+(\kappa-1)\omega+\omega \Rightarrow \alpha_{k+1}=\alpha_1+k\omega$.

ΣΤ) Μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.

Επομένως όταν δεν είναι εύκολο να αποδείξουμε την πρόταση $p \Rightarrow q$ μπορούμε να αποδείξουμε την αντιθετοαντίστροφή της, δηλαδή την πρόταση $\sim q \Rightarrow \sim p$.

<u>*Παράδειγμα:*</u> Να δειχθεί ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού είναι περιττός, τότε και ο αριθμός είναι περιττός.

Θα δείξουμε την αντιθετοαντίστροφη της προηγούμενης. Δηλαδή θα δείξουμε ότι αν ο αριθμός δεν είναι περιττός, (άρα άρτιος) τότε το τετράγωνό του δεν είναι περιττός, άρα άρτιος.

Πράγματι έστω α = 2κ (άρτιος) τότε $\alpha^2 = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2)$ = άρτιος.

Η Αρχή της Περιστεροφωλιάς

Λέγεται και Αρχή του Dirichlet, γιατί διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Γερμανό μαθηματικό Peter Gustav Lejeune Dirichlet το 1834. Στα μαθηματικά η διατύπωσή της είναι η εξής:

Αν υπάρχουν n αντικείμενα για να τοποθετηθούν σε m θέσεις όπου $n>m$ τότε τουλάχιστον σε μία θέση θα υπάρχουν περισσότερα από ένα αντικείμενα.

Επομένως:

Α) Αν έχουμε 7 περιστέρια και 6 φωλιές θα υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά όπου θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιστέρια.

Β) Αν έχω 9 κέρματα από 1 λεπτό έως 2 ευρώ τουλάχιστον δύο θα είναι ίδια.

Γ) Αν στη βιβλιοθήκη μιας πόλης υπάρχουν πάνω από 10.000 βιβλία (Διαφορετικοί Τίτλοι), να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από αυτά (εννοείται με διαφορετικούς τίτλους) έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος σελίδων.

Πράγματι:

Τα περισσότερα βιβλία έχουν από 200 μέχρι 800 σελίδες. Δεν είναι λοιπόν παράλογο να υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν βιβλία με περισσότερες από 9 000 σελίδες! Έτσι αν για περιστεροφωλιές βάλλουμε το πλήθος των σελίδων, αυτές θα είναι λιγότερες από 9 000. Στη συνέχεια θεωρούμε πως τα βιβλία της βιβλιοθήκης είναι τα περιστέρια. Έτσι για παράδειγμα αν κάποιο βιβλίο έχει μία σελίδα θα καθίσει στην 1η φωλιά, αν έχει δύο σελίδες στην 2η, αν έχει τριάντα σελίδες στη 30η κ.ο.κ. Όμως τα βιβλία (περιστέρια) είναι πάνω από 10.000 ενώ οι σελίδες (φωλιές) λιγότερες από 10 000, άρα σύμφωνα με την Αρχή της περιστεροφωλιάς δύο τουλάχιστον βιβλία (περιστέρια) θα έχουν το ίδιο πλήθος σελίδων (ίδια φωλιά).